ЛА - Каспарян 12.11.12

Лема

Ако $a_1 - a_n$ и $b_1 - b_m$ са базиси на ЛПV, то броят вектори са $n = m$

Док-во

от ЛНЗ-ст на $b_1 - b_m$ от $ЛПV = l(a_1 - a_n) \Rightarrow$
$m \leq n$ по лемата за ЛЗ

обратно

От ЛНЗ-ст на $a_1 - a_n \in V = l(b_1 - b_m) \Rightarrow$
$n \leq m$. Но от $m \leq n$ и $n \leq m \Rightarrow n = m$
(броят вектори наричаме размерност на простр)

Размерността на нулевото пространство е 0

$$\dim\{\vec{0}\} = 0$$

Деф

Ако V е ненулево крайномерно ЛП то броят на векторите „n" в един, а оттам и всеки един базис на V се нарича размерност на V : $\dim V = n$

Деф

Ако V не е крайномерно пространство, казваме че V е безкрайномерно и записваме $\dim = \infty$

Пример

1) $\dim F^n = n$, защото $e_1 - e_n$ с $e_i = (0,0,\ldots,\underset{i}{1},\ldots,0) \in F^n$ е базис на F^n (наредените n-торки)

2) Ако F е числово поле то полиномите на x $\not\in F_{[x]}$ е безкрайномерно пространство. Ако допуснем че е крайномерно т.е. $F_{[x]} = \ell(f_1 - f_m)$ за $f_i \in F_{[x]}$, $\deg f_i = d_i$ и $d = \max(d_1 \ldots d_m)$ то всеки полином от $\ell(f_1 - f_m) = \{\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_m f_m \mid \lambda_i \in F\}$ е от степен $\leq d$. От $\exists x \in F_{[x]}$ следва $F_{[x]} \neq \ell(f_1 \ldots f_m)$ и $\dim F_{[x]} = \infty$

Лема

Ако $e_1 - e_m$ са ЛНЗ-ни вектори от нулево крайномерно пространство V, то $k \leq m = \dim V$ и $\exists e_{k+1} - e_n \in V$, такива че $e_1 - e_k, e_{k+1}, \ldots e_n$ е базис на V

Док-во

Ако $v_1 - v_n$ е базис на V то ЛНЗ-ст на $e_1 - e_k \in V$ при условие $V = \ell(v_1 - v_n) \Rightarrow$ $k \leq n$ по лемата за ЛЗ-ст

Ако $k = n$ т.е. твърдим че $\ell(e_1 \ldots e_k) = V$ и $e_1 - e_k$ е базис на V. В противен случай от $\ell(e_1 - e_{k+1=n}) \not\in V$ $\exists e_{n+1} \in V$, т.е. е известен $\ell(e_1 - e_n)$. следователно $e_1 - e_n, e_{n+1} \in V = \ell(v_1 - v_n)$ са ЛНЗ-ни по лемата

за ЛНЗ-ст. Това противоречи на лемата за ЛЗ-ст и доказва че $l(b_1 - b_k) = V$ за $k = n$

Ако $k < n$ твърдим че $l(b_1 - b_k) \neq V$, защото в противен случай ЛНЗ-те $V_1 - V_n \in V = l(b_1 - b_k)$ водят до противоречие с лемата за ЛЗ-ст. Но при $l(b_1 - b_k) \neq V$ $\exists b_{k+1} \in V \setminus l(b_1 - b_k)$ т. че $b_1 - b_k, b_{k+1}$ са ЛНЗ. След краен брой стъпки допълване $b_1 - b_k$ до базис $b_1 - b_k, b_{k+1} - b_n$ на V

Тб(

1) ЛПВ e с размерност $n \in \mathbb{N}$ ($\dim V = n \in \mathbb{N}$)
$\Leftrightarrow$ $\exists n$ ЛНЗ-ми вектора $a_1 - a_n \in V$ и произволни $n+1$ вектори $b_1 - b_{n+1} \in V$ са ЛЗ-ми

2) ЛПВ е безкрайномерно $\Leftrightarrow$ за $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists n$ ЛНЗ-ми вектора от V

Док-во

1,1) ако $\dim V = n$ и $a_1 - a_n$ е базис на V то $a_1 - a_n \in V$ са ЛНЗ-ми и произволни $n+1$ вектора $b_1 - b_{n+1} \in V = l(a_1 - a_n)$ са ЛЗ-ми по лемата за ЛЗ-ст

1,2) Ако $\exists$ ЛНЗ-ми $a_1 - a_n \in V$ и произволни $b_1 - b_{n+1} \in V$ са ЛЗ-ми то твърдим $l(a_1 - a_n) = V$ така че $a_1 - a_n$ е базис на V и $\dim V = n$

Нaистина допускането $a_1 -- a_n \notin V$ води до съществуване $a_{n+1} \in V \setminus l(a_1 -- a_n)$ така че $a_1 -- a_{n+1}$ са ЛНЗ-ми. Това противоречи на предположението и доказва $l(a_1 -- a_n) = V$

2) С допускане на противното

Ако $\dim V = \infty$ и $\exists n \in \mathbb{N}$ т.че произволни n вектори $v_1 -- v_n \in V$ са ЛЗ-ми, то означаваме с $k+1$ минималното такова естествено число. Тогава съществуват „k" ЛНЗ-ми $a_1 -- a_k \in V$ и произволни $k+1$ вектора $\in V$ и са ЛЗ-ми, т.че $\dim V = k$ съгласно условие 1

22) С допускане на противното

Ако за $\forall n \in \mathbb{N}$ съществуват ЛНЗ-ми $a_1 -- a_n \in V$ и $\dim V = k \in \mathbb{N}$ то съгласно условие 1 произволни $k+1$ вектора от V са ЛЗ-ми, което е противно на предположението. Следователно $\dim V = \infty$

Следствие

Нека V е нетривиално крайномерно пространство W е подпространство на V. Тогава W е крайномерно, $\dim W \leq \dim V$ и $\dim W = \dim V \Leftrightarrow W = V$

Док-во

Ако $\dim V = n$, то съществуват ЛНЗ-ни вектора $a_1 - a_n$ и произволни $n+1$ вектори $v_1 - v_{n+1} \in V$ са ЛЗ-ни. Понеже W е подмножество на V, произволни $n+1$ вектора $w_1 - w_{n+1} \in W$ са ЛЗ-ни. Нека m е най-малкото естествено за което произволни $m+1$ вектора $w_1 - w_{m+1} \in W$ са ЛЗ-ни. Тогава съществуват ЛНЗ-ни $f_1 - f_m \in W$.

Съгласно доказателството на твърдението част 1, оттук следва че $f_1 - f_m$ е базис на W
Следователно $\dim W = m \leq n$, $m+1, m+1 \leq n+1$
Нека $\dim W = \dim V$, $w_1 - w_n$ е базис на W, $v_1 - v_n$ е базис на V за $\dim V = \dim W = n$
Тогава за $\forall v \in V$, $v, w_1 - w_n \in V = \ell(v_1 - v_n)$ са ЛЗ-ни и съществуват $\lambda_0 - \lambda_n \in F$ с $\lambda_0 v + \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n = \vec{0}$ и $\lambda_i \neq 0$. Ако $\lambda_0 = 0$ то $\lambda_1 w_1 + \dots \lambda_n w_n = \vec{0}$ за $\lambda_i \neq 0$, за $1 \leq i \leq n$ противоречи с ЛНЗ-ст на $w_1 - w_n$, Следователно $\lambda_0 \neq 0$ и $v = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0} w_1 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_0} w_n \in \ell(w_1 - w_n) = W$ или $V \leq W \Rightarrow V = W$

Координати на вектор спрямо фиксиран базис. Трансформация на координатите при смяна на базиса

Деф
Следните условия са еквивалентни в

ненулево крайномерно пространство V

1.1) векторите $a_1 - a_n$ образуват базис на V

1.2) всеки вектор $v \in V$ има единствено представяне $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ като линейна комбинация на тези вектори с коефициенти $x_1 - x_n \in F$. В такъв случай казваме че $x_1 - x_n$ са координати на v спрямо базиса $e_1 - e_n$ от условие 1 $\Rightarrow$ условие 2

2.1) Ако $e_1 - e_n$ е базис на V то $\forall v \in V = l(e_1 - e_n)$ има поне едно представяне $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ като линейна комбинация на $e_1 - e_n$

Ако $x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = v = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$ то $(x_1 - y_1) e_1 + \dots + (x_n + y_n) e_n = \vec{0}$ съгласно ЛНЗ-ст на базиса $e_1 - e_n \Rightarrow x_i - y_i = 0$ за $\forall 1 \le i \le n$ или $x_i = y_i$

2.2) Ако $\forall v \in V$ има представяне $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ като линейна комбинация на $e_1 - e_n$, то $V = l(e_1 - e_n)$. Ако $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = \vec{0}$ то съгласно единствеността на представянето $\vec{0} = 0e_1 + 0e_2 + \dots + 0e_n$ на $\vec{0} \in V$ като линейна комбинация на $e_1 - e_n$ получаваме $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = 0$ т.е. $e_1 - e_n$ са ЛНЗ-ми. Това доказва че $e_1 - e_n$ е базис на V

Лема

Нека $u = (u_1 - u_m)$ са m ЛНЗ-ми вектора $A \in M_{m \times n}(F)$ и $uA = (\underbrace{\vec{0} - \vec{0}}_{n})$ то $A = 0_{m \times n}$

Доц-во

За $\forall\ 1 \le j \le n$ ще докажем че j-тия стълб на A се състои от нули. Написана по дължината $(\underbrace{\vec{0} \dots \vec{0}}_{n}) = uA = (u_1 \dots u_m)\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ след сравняване на j-тите стълбове на 2-те страни получаме $\vec{0} = (u_1 \dots u_m)\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \dots + a_{mj}u_m$

Съгласно ЛНЗ-ст на $u_1 \dots u_m \Rightarrow a_{sj} = 0$ за $\forall\ 1 \le s \le m$. Понеже $1 \le j \le n$ е произволно, това доказва $a_{sj} = 0, \forall 1 \le s \le m, 1 \le j \le n$ или $A = 0_{m \times n}$

Деф

Нека $e_1 \dots e_n$ и $f_1 \dots f_n$ са базиси на ЛПВ. За $\forall\ 1 \le j \le n$ нека $f_j = t_{1j}e_1 + \dots + t_{nj}e_n$ за $t_{ij} \in F$

Матрицата $T = \begin{matrix} e_1 \\ \\ e_n \end{matrix}\begin{pmatrix} | & | & | \\ f_1 & f_2 & f_n \\ | & | & | \end{pmatrix}$ образувана от стълбовете от координатите на новия базис $f_1 \dots f_n$ спрямо стария базис $e_1 \dots e_n$ се нарича матрица на прехода от базиса $e = (e_1 \dots e_n)$ към базиса $f = (f_1 \dots f_n)$

Еквивалентно новия $f = eT = e\begin{pmatrix} | & | & | \\ f_1 & f_2 & f_n \\ | & | & | \end{pmatrix}$

Матрица на прехода е онази матрица която умножавайки отдясно стария базис получаваме новия базис

Т6

Нека $e=(e_1,\dots,e_n)$ е базис на V. Матрица $T\in M_{n\times n}(F)$ е матрица на прехода от e към базис $f=eT \iff \det(T)\neq 0 \iff T$ е обратима

Док-во

1.1) Ако $f=eT$ е базис на V, нека $S\in M_{n\times n}(F)$ е матрица на прехода от f към e. Тогава $e=fS=(eT)S=e(TS)$. Непосредствено пресмятаме че $e\cdot E_n=(e_1,\dots,e_n)\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}=(e_1,\dots,e_n)=e$

Сега от $eE_n=e=e(TS)$ получаваме че $e(TS-E_n)=\underbrace{\vec{0}\dots\vec{0}}_{n}$. По лемата $\Rightarrow$ анулиране на $TS-E_n=0_{n\times n}$. Следователно $TS=E_n$, откъдето T е обратима и неособенна

1.2) Ако $T\in M_{n\times n}(F)$, $\det(T)\neq 0$ то стълбовете на T са ЛНЗ-ми. В противен случай $\exists\ 1\le p\le n$ т.че $T\left(\sum_{q=1}^{p}\lambda_{qp}q\right)=(e_1,\dots,e_n)$ и $\det T=\det(T^t)=0$ от свойство 5. Но тъй ЛНЗ стълбове на векторите $f_j=t_{1j}e_1+\dots+t_{nj}e_n$ с координати на j-тия стълб на T, $1\le j\le n$ са ЛНЗ-ми. Следователно $f_1,\dots,f_n$ е базис на V тъй като $\dim V=n$ и $f_1,\dots,f_n$ са ЛНЗ-ми. По този начин T е матрица на прехода от базиса e към базиса $(f=eT)$ Ф

За произволен вектор $v \in V$ означаваме с $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ координати на $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ спрямо базиса $e = (e_1 \dots e_n)$. Тогава вектора $v = ex = (e_1 \dots e_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Ако $f = eT$ е нов базис с матрица на прехода T от e към $f = (f_1 \dots f_n)$ а $y = (y_1 \dots y_n)$ са координати на $v = fy = (f_1 \dots f_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ спрямо f, то $ex = v = fy = (eT)y = e(Ty)$. Оттук $ex - e(Ty) = \vec{0}$, $e(x - Ty) = \vec{0}$ съгласно ЛНЗ-ст на $e_1 \dots e_n \Rightarrow$ $x - Ty = 0_{n \times 1}$ по лемата. Следователно координатите $x = Ty$ спрямо старя базис се получават от координатите y спрямо новия базис чрез ляво умножение с матрицата на прехода T от e към f

$f = eT \Rightarrow x = Ty$

f – нов базис; e – стар базис; T – дясно умн с матрица на прехода от e към f; x – стари коорд; y – нови координати; T – ляво умн с T

Сума на подпространства (ПП) и директна сума

Лема за Π-сечение

Ако $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ е фамилия на ПП на ЛПВ V то $\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha$ е ПП на V

Док-во

Ако u_1 и $u_2 \in \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha$ и $\lambda \in F$, то $u_1, u_2 \in U_\alpha$ за $\alpha \in A \Rightarrow u_1 + u_2$ и λu_1 са в U_α за $\forall \alpha \in A$, защото U_α са ПП-ва на V. Следователно $u_1 + u_2$ и $\lambda u_1 \in \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha$ и $\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha$ са ПП-ва на V

Лема за $\cup$-обединение

Ако обединението $U \cup W$ на ПП-ва $U, W \in V$ е ПП-во на V то $U \subseteq W$ или $W \subseteq U$

Док-во

Допускаме противното и разглеждаме ПП-ва U и W на V, такива че $U \cup W$ е ПП-во на V $U \not\subseteq W$ и $W \not\subseteq U$. Тогава съществуват елементи $u \in U \setminus W$ и $w \in W \setminus U$. От $u, w \in U \cup W \Rightarrow u + w \in U \cup W$, защото това обединение е ПП-во. Ако $u + w \in U$ то $w = (u + w) + (-1)u \in U$, което противоречи на избора на w извън U ($w \notin U$)

Ако $u + w \in W$, $u = (u + w) + (-1)w \in W$, е противно на избора на $u \notin W$

Противоречието доказва лемата

Опр

Ако $V_1 - V_n$ са ПП-ва на ЛПП V то множеството $V_1 + \dots + V_n = \{v_1 + \dots + v_n ; v_i \in V_i , 1 \le i \le n\}$ се нарича сума на $V_1 \dots V_n$

Т6

Ако $V_1 - V_n$ са ПП-ва на V, то $V_1 + \dots + V_n = \ell(V_1 \cup \dots \cup V_n)$ по този начин $V_1 + \dots + V_n$ е ПП-во на V и по-точно $V_1 + \dots + V_n$ е минималното ПП-во на V съдържащо $V_1 \cup \dots \cup V_n$

Док-во

$\forall v \in \ell(V_1 \cup \dots \cup V_n)$ е от вида

$v = \sum_{j_1=1}^{d_1} \lambda_{1j} v_{1j} + \dots + \sum_{j_n=1}^{d_n} \lambda_{nj_n} v_{nj_n}$ с $v_{ij} \in V_i$ и $\lambda_{ij} \in F$. Понеже V_i са ПП-ва, векторите $w_i = \sum_{j_i=1}^{d_i} \lambda_{ij} v_{ij} \in V_i$. Така че

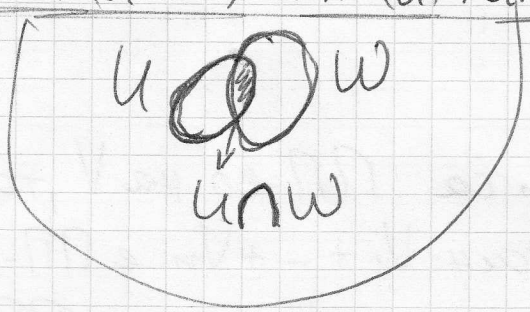
$v = w_1 + \dots + w_n \in V_1 + \dots + V_n$

обратно

$\forall u \in V_1 + \dots + V_n$ е от вида $u = u_1 + \dots + u_n$ с $u_i \in V_i$ за $\forall 1 \le i \le n$. Понеже $u_1 \dots u_n \in V_1 \cup \dots \cup V_n$, $u = 1u_1 + 1u_2 + \dots 1u_n \in \ell(V_1 \cup \dots \cup V_n)$ и $V_1 + \dots + V_n = \ell(V_1 \cup \dots \cup V_n)$

Т за размерността на сума и сечение

Ако U и W са крайномерни ПП-ва на ЛПВ, то $U+W$ и $U \cap W$ са крайномерни ПП-ва на V и $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$



Док-во

Като ПП-во на крайномерно пространство V, $U \cap W$ е крайномерно

Избираме базис $a_1 - a_k$ на $U \cap W$. Допълваме до бази $a_1 - a_k, b_1 - b_m$ на U и базис $a_1 - a_k, c_1 - c_n$ на W. Ако $U = \{0\}$ то $U \cap W = \{\vec{0}\}$, $U+W = W$ и теоремата е вярна. Ако $U \cap W = \{\vec{0}\}$ избираме базис $b_1 - b_m$ на U и базис $c_1 - c_n$ на W

Достатъчно е да докажем че $a_1 - a_k, b_1 - b_m, c_1 - c_n$ е базис на $U+W$. Тогава

$$\dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = (k+m) + (k+n) - k = k + m + n = \dim(U+W)$$